

5.3. PIERWIĄSTEK WIELOMIANU

Liczba a jest **pierwiastkiem** (miejscem zerowym) wielomianu $W \Leftrightarrow W(a) = 0$.

Wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.

Wielomian nieparzystego stopnia ma co najmniej jeden pierwiastek.

Przykład 5.3.1. Sprawdź która z liczb: -2 , 1 jest pierwiastkiem wielomianu

$$W(x) = x^3 + x^2 - 2$$

Rozwiązanie	Komentarz
$W(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - 2 = -8 + 4 - 2 = -6$	Obliczamy wartość wielomianu dla liczby -2 .
$W(1) = 1^3 + 1^2 - 2 = 0$	Obliczamy wartość wielomianu dla liczby 1
Odp. Pierwiastkiem wielomianu W jest liczba 1 .	Wartość wielomianu W dla liczby 1 jest równa zero.

Przykład 5.3.2. Dla jakich wartości parametru m liczba 3 jest pierwiastkiem wielomianu:

$$W(x) = 2mx^3 - mx^2 - x + 5$$

Rozwiązanie	Komentarz
$W(3) = 2m \cdot 3^3 - m \cdot 3^2 - 3 + 5 = 54m - 9m - 3 + 5 = 45m + 2$	Obliczamy wartość wielomianu dla liczby 3 .
$45m + 2 = 0$ $45m = -2 / : 45$ $m = -\frac{2}{45}$	Liczba 3 jest pierwiastkiem wielomianu W , dlatego wartość wielomianu dla liczby 3 przyrównujemy do zera. Obliczamy m .

Jeżeli wielomian $W(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ ma n pierwiastków $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, to można go przedstawić w postaci iloczynowej:

$$W(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W \Leftrightarrow$ w rozkładzie wielomianu W na czynniki występuje czynnik $x - a$.

Przykład 5.3.3. Wyznacz pierwiastki wielomianu: $W(x) = (x + 2)(x - 3)(2x + 10)$.

Rozwiązanie	Komentarz
$(x + 2)(x - 3)(2x + 10) = 0$	Wielomian W jest zapisany w postaci iloczynowej. Aby wyznaczyć pierwiastki wielomianu $W(x)$ musimy wyznaczyć takie wartości x , dla których $W(x) = 0$
$x + 2 = 0$ lub $x - 3 = 0$ lub $2x + 10 = 0$ $x = -2$ $x = 3$ $2x = -10 / : 2$ $x = -5$	Iloczyn jest równy zeru, gdy co najmniej jeden z czynników jest równy zeru. Z każdego czynnika obliczamy x .
Odp. Pierwiastkami wielomianu W są liczby : - 2 , 3, - 5.	

Przykład 5.3.4. Zbuduj wielomian czwartego stopnia, wiedząc, że współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej x jest równy 5 i że pierwiastkami tego wielomianu są liczby :0, -1, 3 (3 jest pierwiastkiem podwójnym).

Rozwiązanie	Komentarz
$W(x) = 5(x - 0)(x + 1)(x - 3)(x - 3)$ $W(x) = 5x(x + 1)(x - 3)^2$	Korzystamy ze wzoru $W(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$ i zapisujemy wielomian w postaci iloczynowej.
$W(x) = (5x^2 + 5x)(x^2 - 6x + 9)$ $W(x) = 5x^4 - 30x^3 + 45x^2 + 5x^3 - 30x^2 + 45x$ $W(x) = 5x^4 - 25x^3 + 15x^2 + 45x$	Po uproszczeniu otrzymujemy wielomian w postaci ogólnej.

ĆWICZENIA

Ćwiczenie 5.3.1. (2pkt.) Sprawdź która z liczb : 2 , -2 jest pierwiastkiem wielomianu

$$W(x) = x^4 - 10x + 4.$$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wartości wielomianu dla 2 i -2	1
2	Podanie odpowiedzi	1

Ćwiczenie 5.3.2. (2pkt.) Dla jakich wartości parametrów m i n pierwiastkami wielomianu

$$W(x) = x^3 - 3x^2 + mx + n \quad \text{są liczby } -1 \text{ i } 2?$$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Ułożenie układu równań z niewiadomymi m i n	1
2	Podanie wartości m i n	1

Ćwiczenie 5.3.3. (2pkt.) Podaj pierwiastki wielomianu $W(x) = 3x(x^2 - 4)(x+1)^2$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie co najmniej dwóch pierwiastków	1
1	Podanie wszystkich pierwiastków.	2

Ćwiczenie 5.3.4. (1pkt.) Zbuduj wielomian najniższego stopnia, wiedząc, że współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej x jest równy -1 i że pierwiastkami tego wielomianu są liczby -2 , -1 , 3 .

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wielomianu w postaci iloczynowej.	1